INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CONCOURS D'ENTRÉE JUIN 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

3 heures

Il est possible à tout moment d'admettre un résultat afin de l'utiliser dans la suite du problème ; dans ce cas l'indiquer clairement. Les parties II et III sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées en utilisant les résultats de la partie I.

Pour n et p entiers naturels, $\binom{n}{p}$ représente le coefficient binômial (parfois noté C_n^p) ; on rappelle que $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$.

PARTIE I

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels et pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Pour deux éléments P et Q de $\mathbb{R}[X]$, soit $(P|Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\, Q(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\, \mathrm{d}x$.

I.1 Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
On notera E (respectivement E_n) l'espace préhilbertien (respectivement euclidien) obtenu en munissant $\mathbb{R}[X]$ (respectivement $\mathbb{R}_n[X]$) de ce produit scalaire. On notera $\|\cdot\|$ la norme associée.

I.2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction P_n définie par

$$P_n(x) = (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) f^{(n)}(x) \tag{1}$$

où $f^{(n)}$ est la dérivée n-ième de f, avec la convention $f^{(0)} = f$.

I.2.a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_n'(x). \tag{2}$$

I.2.b Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est une fonction polynôme dont on donnera le degré ainsi que le coefficient du terme de plus degré.

I.2.c Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \tag{3}$$

et que $P_n' = nP_{n-1}$.

I.2.d Calculer $P_n(0)$ et $P_n'(0)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

I.2.e Donner la parité de P_n en fonction de n et montrer que la suite des coefficients non nuls de P_n est alternée.

I.3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est solution de l'équation différentielle

$$y'' - xy' + ny = 0. \tag{4}$$

I.4.a Chercher les solutions de cette équation (4) développables en série entière en précisant le rayon de convergence.

I.4.b Parmi ces solutions, quelles sont les solutions polynomiales ?

I.5 Soit L l'application qui à tout $P \in E$ associe $L(P)$ défini par

$$L(P)(x) = xP'(x) - P''(x) \tag{5}$$

Soit L_n sa restriction à E_n. Montrer que L_n est un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien E_n.

I.6 Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de L ? (dans un premier temps, on pourra raisonner sur E_n)

I.7.a Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de E.

I.7.b Montrer que P_n est orthogonal à toute fonction polynôme de degré strictement inférieur à n.

I.8 En déduire que pour n, P_n a exactement n racines réelles distinctes.

PARTIE II

À toute fonction polynôme P définie par $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, on associe $c(P)$ défini par $c(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$.

II.1.a Montrer que $c(P_n) = (-i)^n P_n(i)$.

II.1.b En déduire une relation de récurrence entre $c(P_{n+1})$, $c(P_n)$ et $c(P_{n-1})$.

II.2 Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n défini par $u_n = \dfrac{c(P_{n+1})}{c(P_n)}$.

II.2.a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \dfrac{n}{u_{n-1}}$.

II.2.b En déduire que pour tout entier n on a :

$$\frac{1}{2} + \sqrt{n + \frac{1}{4}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{n + \frac{5}{4}} \tag{6}$$

(on admettra que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \dfrac{n}{\frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{3}{4}}} \leqslant \dfrac{1}{2} + \sqrt{n + \dfrac{5}{4}}$).

II.3 On considère la fonction Φ définie par $\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \dfrac{y^n}{n!}$.

II.3.a Montrer que pour tout entier n et tout réel x on a $|P_n(x)| \leqslant \max(1, |x|^n) c(P_n)$.

II.3.b Montrer que la série qui définit Φ converge sur $\mathbb{R}^2$ et que Φ est de classe C^2.

II.4 Établir une relation entre Φ et $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$ et en déduire que $\Phi(x, y) = \exp\left(xy - \dfrac{y^2}{2}\right)$.

II.5.a Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \sqrt{e} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{P_n(x)}{n!}$.

II.5.b Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} \dfrac{P_{n-k}(x) P_k(x)}{(n-k)!k!} = \dfrac{\sqrt{2}^n P_n\left(\sqrt{2}x\right)}{n!}$.

II.5.c Montrer que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, P_n(u+v) = \dfrac{1}{\sqrt{2}^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_{n-k}\left(\sqrt{2}u\right) P_k\left(\sqrt{2}u\right)$.

PARTIE III

III.1 Soit un entier $s > 1$.

III.1.a Montrer que pour tout entier naturel r, il existe des réels α_k $(0 \leqslant k \leqslant r+s)$ tels que $P_r P_s = \sum_{k=0}^{r+s} \alpha_k P_k$.

III.1.b Donner explicitement cette décomposition pour $r = 0$ et pour $r = 1$.

III.1.c En exprimant P_2 à l'aide de $P_1 P_1$ et de P_0, exprimer $P_2 P_s$ comme combinaison linéaire de P_{s+2}, P_s et P_{s-2}.

III.1.d Montrer que pour tout entier naturel $r \leqslant s$, il existe des réels β_k $(0 \leqslant k \leqslant r)$ tels que $P_r P_s = \sum_{k=0}^{r} \beta_k P_{r+s-2k}$.

III.2 Montrer que $\forall (r, s) \in \mathbb{N}^2, P_r P_s = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}\binom{s}{k} k! P_{r+s-2k}$.

Indication : montrer que $s\binom{s-1}{k} = (k+1)\binom{s}{k+1}$ pour tout $k \leqslant s-1$ et dériver la fonction $x \mapsto P_r(x)\left(P_s(x)\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)\right)$. On rappelle que $\binom{n}{p} = 0$ si $p \notin [0, n]$.

III.3 Calculer $\|P_n\|$ (la norme de P_n). On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.